

Solucion Examen Escrito N5

Calculo I (Universidad de Lima)





PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-2
TIEMPO: 90 minutos

EXAMEN ESCRITO 5

CÓDIGO	APELLIDOS Y NOMBRES	SECCIÓN

INDICACIONES:

- ✓ Forman parte de los criterios de calificación: el procedimiento, el orden, la claridad de las respuestas y el uso apropiado de la notación matemática.
- ✓ Se permite el uso personal de una calculadora científica básica, no programable ni graficadora.
- ✓ Escriba con lapicero de tinta azul o negra. La prueba desarrollada con lápiz no será calificada.
- ✓ La prueba consta de 04 preguntas, cuyo puntaje está indicado en cada una de ellas.

Con la finalidad de evitar la anulación de la prueba tenga en cuenta que no se permite:

- ✓ Utilizar material de consulta (apuntes manuscritos o impresos).
- ✓ Mantener encendidos y al alcance de la mano el teléfono celular, *smartwatch*, así como cualquier otro medio o dispositivo electrónico de comunicación.
- ✓ Conversar o hacer consultas durante el desarrollo de la prueba.
- ✓ Desglosar o arrancar alguna hoja del cuadernillo de respuestas o de preguntas.
- ✓ Participar en la sustracción, almacenamiento, reproducción o transmisión total o parcial de las preguntas de la prueba, a través de cualquier medio.

Fecha: 02 / 12 / 2024

---

1. Se estima que t meses después del 1 de enero del presente año, el precio de un artículo aumenta a razón de

$$\frac{4t^2 + 13t + 5}{(3t+1)(t+1)(t+2)}; \quad t \geq 1 \quad \text{soles por mes,}$$

   a) (4.5 ptos) Si el 1 de setiembre del presente año, el precio de dicho artículo fue de 36 soles, mediante un método de integración adecuado, halle la función precio del artículo.
   En este problema, redondee el valor de la constante a dos decimales.

   b) (1.5 ptos) ¿Cuál fue el precio del artículo el 1 de noviembre del presente año? Presente su respuesta con dos cifras decimales.

Solución.

(a)

Escribe el precio de un artículo, como una integral indefinida:

$$p(t) = \int \frac{4t^2 + 13t + 5}{(3t+1)(t+1)(t+2)} dt$$

Descompone la función integrando en suma de fracciones parciales:

$$\frac{4t^2 + 13t + 5}{(3t+1)(t+1)(t+2)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t+1} - \frac{C}{t+2}$$

$$4t^2 + 13t + 5 = A(t+1)(t+2) + B(3t+1)(t+2) + C(3t+1)(t+1)$$

$$\boldsymbol{A = 1} \quad ; \quad \boldsymbol{B = 2} \quad ; \quad \boldsymbol{C = -1}$$

Luego:

$$\frac{4t^2 + 13t + 5}{(3t+1)(t+1)(t+2)} = \frac{1}{3t+1} + \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

Halla el precio del artículo:

$$p(t) = \int \left(\frac{1}{3t+1} + \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt$$

$$\boldsymbol{p(t) = \frac{1}{3}\ln|3t+1| + 2\ln|t+1| - \ln|t+2| + K}$$

Aplica la condición inicial para hallar el valor de la constante:

$$p(8) = 36 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{K = 32{,}84}$$

Escribe el precio del artículo:

$$\boldsymbol{p(t) = \frac{1}{3}\ln|3t+1| + 2\ln|t+1| - \ln|t+2| + 32{,}84}$$

(b)

Calcula el precio solicitado:

$$p(10) = 36{,}30$$

El precio del artículo el 1 de noviembre del presente año, fue de **36, 30 soles**

2. (5 ptos) Utilizando un método de integración adecuado, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x^3(x^4-1)}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$$

Solución.

Identifica la sustitución algebraica:

$$z = x^4 + 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} z - 1 = x^4 \\ . \\ dz = 4x^3 dx \end{array} \right\}$$

Halla la integral respecto a la nueva variable:

$$I = \int \frac{x^3(x^4-1)}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx = \int \frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x^4+1}}\ (x^3)dx = \int \frac{z-2}{\sqrt[3]{z}}\left(\frac{dz}{4}\right) = \frac{1}{4}\int \left(z^{2/3} - 2z^{-1/3}\right)dz$$

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{3z^{5/3}}{5} - 3z^{2/3}\right) + C$$

Escribe el resultado en la variable original:

$$\boldsymbol{I = \frac{3}{20}(x^4+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^4+1)^{2/3} + C}$$

3. (5 ptos) Utilizando un método de integración adecuado, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) arctanx\ dx$$

Solución.

Identifica los elementos para la integración por partes:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u = arctanx & \Longrightarrow & du = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ . & . & . \\ dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx & \Longrightarrow & v = x + \frac{1}{x} \end{array} \right\}$$

Aplica integración por partes:

$$I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) arctanx\ dx = \left(x + \frac{1}{x}\right) arctanx - \int \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$I = \left(x + \frac{1}{x}\right) arctanx - \int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(x + \frac{1}{x}\right) arctanx - \int \left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\boldsymbol{I = \left(x + \frac{1}{x}\right) arctanx - ln|x| + C}$$

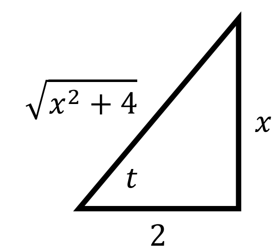
4. (4 ptos) Utilizando un método adecuado de integración, halle la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}\, dx$$

Solución.

Identifica la sustitución trigonométrica:

$$\left\{\begin{matrix} x = 2tant \\ dx = 2sec^2 tdt \\ tant = \dfrac{x}{2} \end{matrix}\right\}$$



Halla la integral:

$$I = \int \frac{x+2}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}\, dx = \int \frac{2tant+2}{(2sect)^3}\,(2sec^2 tdt) = \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{(tant+1)}{sect}dt$$

$$I = \left(\frac{1}{2}\right)\int (sent + cost)dt = \left(\frac{1}{2}\right)\{-cost + sent\} + C$$

$$\int \frac{\boldsymbol{x+2}}{\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}\right)^3}\, \boldsymbol{dx} = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2\sqrt{x^2+4}}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2+4}}}\right) + \boldsymbol{C}$$

Fórmulas de integración

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a}\right] + C$$

$$\int \sqrt{u^2+a^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2+a^2} + a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|\right] + C$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2}du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|\right] + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u\, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

Los profesores del curso